Inhalt

Vorwort	11
1 Einordnung und Grundlagen	15
Übersicht	15
1.1 Einordnung	15
1.2 Mengen	18
1.2.1 Operationen mit Mengen	21
1.2.2 Aussagen und Aussageformen	22
1.3 Terme und Gleichungen	26
1.3.1 Terme und Termumformungen	26
1.3.2 Gleichungen und Ungleichungen	27
2 Das Funktionskonzept	33
Übersicht	33
2.1 Funktionen und Abbildungen	34
2.2 Graphische Darstellung, Bild und Urbild	37
2.3 Wachstums- und Krümmungseigenschaften von Funktionen	42
2.3.1 Lage des Funktionsgraphen im Koordinatensystem	42
2.3.2 Monotonieeigenschaften von Funktionen	43
2.3.3 Krümmung von Funktionen	43
2.4 Verkettung und Umkehrung von Funktionen	46
2.5 Exkurs: Relationen	49
Zusammenfassung	50
3 Lineare Funktionen	51
Übersicht	51
3.1 Normalform linearer Funktionen	52
3.1.1 Interpretation des Faktors a der Normalform	52
3.1.2 Interpretation des Summanden b der Normalform	52
3.1.3 Nullstellen linearer Funktionen	52
3.1.4 Bestimmung der Normalform einer linearen Funktion aus zwei Punkten	53
3.2 Punkt-Steigungsform linearer Funktionen	54
3.3 Koordinatenform linearer Funktionen	54
3.4 Umkehrfunktion und Normale einer linearen Funktion	55
3.4.1 Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion	55
3.4.2 Die Normale einer linearen Funktion	56
3.5 Schnittpunkte linearer Funktionen	57
3.6 Ökonomische Anwendungen linearer Funktionen	58
Zusammenfassung	60
4 Quadratische Funktionen	61
Übersicht	61

4.1	Normalform quadratischer Funktionen	61
4.2	Scheitelpunktform quadratischer Funktionen	63
4.3	Nullstellen und Schnittpunkte quadratischer Funktionen	65
4.4	Linearform quadratischer Funktionen	67
4.5	Umkehrung quadratischer Funktionen	68
4.6	Ökonomische Anwendungen quadratischer Funktionen	69
4.6.1	Quadratische Gewinnfunktionen bei linearer Nachfragefunktion	69
4.6.2	Modellierung von Nachfragesituationen durch quadratische Funktionen	71
4.6.3	Kleinste-Quadrate-Methode	73
	Zusammenfassung	74
5	Rationale Funktionen	75
	Übersicht	75
5.1	Potenzen und Monome	76
5.2	Polynome und ganz-rationale Funktionen	80
5.3	Teilbarkeit von Polynomen und Polynomdivision	83
5.4	Nullstellen von Polynomen	89
5.5	Interpolation durch Polynome	92
5.6	Gebrochen-rationale Funktionen	95
	Zusammenfassung	100
6	Spezielle Funktionen	101
	Übersicht	101
6.1	Exponentialfunktionen	101
6.1.1	Die Schreibweise $f(x) = a^x$ für die Exponentialfunktion	103
6.1.2	Das Monotonieverhalten der Exponentialfunktion	103
6.1.3	Die Eulersche Exponentialfunktion	104
6.2	Logarithmusfunktionen	105
6.3	Potenzfunktionen	108
6.4	Trigonometrische Funktionen	110
6.4.1	Geometrische Festlegung der trigonometrischen Funktionen	110
6.4.2	Rechenregeln für trigonometrische Funktionen	115
6.4.3	Anwendungen trigonometrischer Funktionen	116
6.5	Stückweise definierte Funktionen	118
6.5.1	Die Betragsfunktion	119
6.5.2	Exkurs: Die Indikatorfunktion	121
	Zusammenfassung	122
7	Folgen und Reihen	125
	Übersicht	125
7.1	Folgen in der Ökonomie	125
7.2	Explizite und implizite Folgen	127
7.3	Konvergenz von Folgen	132
7.3.1	Grenzwertbestimmung bei expliziten Folgen	134
7.3.2	Grenzwertbestimmung bei impliziten Folgen	139
7.3.3	Nachweismöglichkeiten für Konvergenz	139
7.4	Summenfolgen und unendliche Reihen	143
7.4.1	Summenfolgen	143
7.4.2	Unendliche Reihen	144

7.4.3	Potenzreihen	148
7.4.4	Exkurs: Erzeugende Funktionen	150
7.5	Exkurs: Gleichgewichte bei Marktpreisen	152
7.6	Finanzmathematische Folgen und Reihen	155
7.6.1	Zinseszinsrechnung	155
7.6.2	Rentenrechnung	156
7.6.3	Annuitätenrechnung	157
7.6.4	Barwert und Endwert	158
7.6.5	Kapitalwert	160
	Zusammenfassung	161
8	Differentialrechnung in einer Variablen	163
8.1	Funktionsgrenzwerte	163
8.1.1	Von Folgendengrenzwerten zu Funktionsgrenzwerten	163
8.1.2	Einseitige Funktionsgrenzwerte	165
8.1.3	Methoden zur Bestimmung von Funktionsgrenzwerten	166
8.1.4	Divergente und uneigentliche Grenzwerte	169
8.1.5	Grenzwertverhalten gebrochen-rationaler Funktionen	170
8.1.6	Asymptoten von Funktionen	171
8.2	Stetige Funktionen	173
8.3	Differenzierbare Funktionen	177
8.3.1	Tangenten an Funktionsgraphen	178
8.3.2	Ableitung als Grenzwert von Sekantensteigungen	178
8.3.3	Die Ableitungsfunktion	181
8.3.4	Ableitung und Linearisierung	183
8.3.5	Mittelwertsatz	184
8.3.6	Ableitungen höherer Ordnung	184
8.4	Ableitungsregeln	185
8.4.1	Faktorregel	186
8.4.2	Summenregel	187
8.4.3	Produktregel	187
8.4.4	Quotientenregel	187
8.4.5	Kettenregel	188
8.4.6	Ableitung von Potenzreihen	189
8.5	Ableitung und Funktionseigenschaften	191
8.5.1	Ableitung erster Ordnung und Nullstellen	192
8.5.2	Ableitung erster Ordnung und Monotonieverhalten	193
8.5.3	Ableitung erster Ordnung und Regel von de l'Hospital	195
8.5.4	Ableitungen erster Ordnung und Bedingungen für Extrema	196
8.5.5	Ableitungen erster und zweiter Ordnung und lokale Extrema	198
8.5.6	Ableitung zweiter Ordnung und Krümmungsverhalten	201
8.5.7	Kurvendiskussionen und Funktionssteckbriefe	203
8.6	Ökonomische Anwendungen der Differentialrechnung	208
8.6.1	Optimaler Preis	208
8.6.2	Gewinnmaximierung	210
8.6.3	Elastizitäten	211
8.6.4	Marginalanalyse	214
8.6.5	Kostenminimierung	215
	Zusammenfassung	218

9	Integralrechnung	219
9.1	Flächenintegrale und Stammfunktionen	219
9.1.1	Stammfunktion	220
9.1.2	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	221
9.1.3	Flächenintegrale bei Funktionen mit Vorzeichenwechsel	223
9.2	Numerische Berechnung von Flächenintegralen	225
9.2.1	Numerische Integration mit der Trapezregel	227
9.2.2	Numerische Integration mit der Simpson-Regel	227
9.2.3	Exkurs: Das Lebesgue-Integral	228
9.3	Integrationsregeln	230
9.3.1	Faktorregel und Summenregel	230
9.3.2	Partielle Integration	232
9.3.3	Substitutionsregel	234
9.4	Uneigentliche Integrale	236
9.5	Exkurs: Konsumentenrente und Produzentenrente	240
	Zusammenfassung	243
10	Lineare Gleichungssysteme	247
	Übersicht	247
10.1	Lineare Eingabe-Ausgabe-Beziehungen	247
10.2	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	251
10.2.1	Zeilenumformungen eines LGS	252
10.2.2	Die Staffelform eines LGS	253
10.2.3	Die Zeilenstufenform eines LGS	256
	Zusammenfassung	258
11	Lineare Optimierung	259
	Übersicht	259
11.1	Probleme der linearen Optimierung	259
11.1.1	Optimaler Verbrauch von Rohstoffen	260
11.1.2	Transportprobleme	260
11.1.3	Zuordnungsprobleme	260
11.2	Standardform eines LOP	261
11.3	Simplex-Algorithmus	263
11.3.1	Beispiel mit einer freien Variable	263
11.3.2	Simplex-Tableau	264
11.3.3	Basiswechsel mit einer freien Variablen	267
11.3.4	Basiswechsel mit mehreren freien Variablen	269
11.3.5	Schematische Darstellung des Simplex-Verfahrens	272
11.3.6	Diskussion des Verfahrens	273
11.4	Zweiphasenmethode	275
	Zusammenfassung	279
12	Vektoren	281
	Übersicht	281
12.1	Vektoren und Operationen mit Vektoren	281
12.1.1	Elementare Operationen mit Vektoren	283
12.1.2	Vektorräume	285
12.2	Koordinatensysteme und Linearkombinationen	287

12.3	Untervektorraum und Basis	297
12.3.1	Gewinnung einer Basis aus einem Erzeugendensystem	299
12.3.2	Gewinnung einer Basis zur Lösungsmenge eines homogenen li- nearen Gleichungssystems	300
12.4	Vektorgeometrie	303
12.5	Abstandsmessung, Projektionen und KQ-Methode	309
	Zusammenfassung	318
13	Matrizen	319
	Übersicht	319
13.1	Matrix-Vektor-Verflechtungen	319
13.2	Matrix-Matrix-Verflechtungen	323
13.3	Quadratische Matrizen	328
13.4	Determinanten	333
13.4.1	Berechnung der Determinante mittels Zeilenumformungen	335
13.4.2	LAPLACE-Entwicklungsformel für Determinanten	337
13.4.3	Strategien zur Berechnung von Determinanten	338
13.4.4	Anwendungen der Determinante	340
13.5	Eigenwerte und Eigenvektoren	341
13.5.1	Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren	343
13.5.2	Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren	344
13.5.3	Eigenwerte bei symmetrischen Matrizen	345
13.6	Definitheit von Matrizen	348
13.6.1	Definitheit	349
13.6.2	Definitheit unter Nebenbedingungen	352
13.7	Exkurs: Anwendungen der Matrizenrechnung	354
13.7.1	Input-Output-Analysen und Leontief-Modelle	354
13.7.2	Übergangsmatrizen und Markoff-Ketten	356
	Zusammenfassung	360
14	Differentialrechnung in mehreren Variablen	363
	Übersicht	363
14.1	Funktionen mehrerer Variablen	364
14.1.1	Definitionsbereiche für Funktionen mehrerer Variablen	364
14.1.2	Lineare und quadratische Funktionen mehrerer Variablen	366
14.1.3	Grenzwerte von Funktionen mehrerer Variablen	367
14.1.4	Grafische Darstellung	368
14.2	Funktionen mehrerer Variablen in der Ökonomie	370
14.2.1	Lineare Funktionen mehrerer Variablen in der Ökonomie	370
14.2.2	Nachfragefunktionen in mehreren Variablen	371
14.2.3	Produktionsfunktionen in mehreren Variablen	373
14.2.4	Homogene Funktionen in der Ökonomie	375
14.3	Ableitungskonzepte für Funktionen mehrerer Variablen	377
14.3.1	Die partielle Ableitung	378
14.3.2	Das Differential	383
14.3.3	Ableitungsregeln für Funktionen mehrerer Variablen	387
14.4	Ableitungskonzepte auf Grundlage des Differentials	390
14.4.1	Richtungsableitung	390
14.4.2	Elastizitäten	395

14.4.3	Implizite Ableitungen und ihre Anwendungen	396
14.5	Ableitungen zweiter Ordnung	404
14.5.1	Die Hesse-Matrix	405
14.5.2	Krümmung impliziter Funktionen	407
14.5.3	Konvexe Funktionen	409
14.6	Integrale für Funktionen mehrerer Variablen	412
14.6.1	Volumenintegrale	412
14.6.2	Integrationsregeln	414
	Zusammenfassung	418
15	Optimierungsaufgaben	419
	Übersicht	419
15.1	Optimierungsaufgaben ohne Nebenbedingungen	419
15.1.1	Bestimmung kritischer Punkte	420
15.1.2	Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema	422
15.1.3	Optimierung konvexer Funktionen	425
15.1.4	Numerische Optimierung mit dem Gradientenabstiegsverfahren	428
15.1.5	Numerische Optimierung mit dem Newton-Verfahren	429
15.2	Optimierung unter Nebenbedingungen	431
15.2.1	Optimierung bei einer Nebenbedingung in Gleichungsform	433
15.2.2	Optimierung unter Ungleichungsrestriktionen	442
15.3	Hinreichende Bedingungen für Extrema	449
15.3.1	Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema unter Nebenbedingungen	450
15.3.2	Nachweis der Optimalität durch Randwertvergleich	454
15.3.3	Optimierung konvexer Funktionen unter Nebenbedingungen	461
15.4	Komparative Statik	465
15.4.1	Ein Verbrauchsproblem	465
15.4.2	Das Envelope-Theorem	467
15.4.3	Ein Kostenproblem	470
15.4.4	Das Theorem impliziter Funktionen	472
	Zusammenfassung	474
Übungsklausuren		475
	Klausur 1	475
	Klausur 2	477
	Klausur 3	479
	Klausur 4	481
	Klausur 5	483
Abbildungen		485
Tabellen		489
Symbole und Abkürzungen		491
Das griechische Alphabet		493
Literatur		495
Index		497