

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
Inhaltsverzeichnis	VII
1 Polynominterpolation	1
1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	1
1.2 Landausche Symbole	2
1.2.1 Einführung	2
1.2.2 Anwendung landauscher Symbole	3
1.2.3 Rechnen mit landauschen Symbolen	4
1.3 Existenz und Eindeutigkeit bei der Polynominterpolation	5
1.3.1 Die lagrangesche Interpolationsformel	5
1.3.2 Erste Vorgehensweise zur Berechnung des interpolierenden Polynoms	6
1.4 Neville-Schema	8
1.5 Die newtonsche Interpolationsformel, dividierte Differenzen	9
1.6 Fehlerdarstellungen zur Polynominterpolation	12
1.7 Tschebyscheff-Polynome	15
– Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	19
– Übungsaufgaben	20
2 Splinefunktionen	23
2.1 Einführende Bemerkungen	23
2.2 Interpolierende lineare Splinefunktionen	24
2.2.1 Die Berechnung interpolierender linearer Splinefunktionen	24
2.3 Minimaleigenschaften kubischer Splinefunktionen	25
2.4 Die Berechnung interpolierender kubischer Splinefunktionen	27
2.4.1 Vorüberlegungen	27
2.4.2 Natürliche Randbedingungen	30
2.4.3 Vollständige Randbedingungen	30
2.4.4 Periodische Randbedingungen	31
2.4.5 Existenz und Eindeutigkeit der betrachteten interpolierenden kubischen Splines	31
2.5 Fehlerabschätzungen für interpolierende kubische Splines	32
– Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	37
– Übungsaufgaben	38
3 Diskrete Fouriertransformation und Anwendungen	41
3.1 Diskrete Fouriertransformation	41
3.2 Anwendungen der diskreten Fouriertransformation	42
3.2.1 Fourierreihen	43

3.2.2	Zusammenhang zwischen komplexen Fourierkoeffizienten und der diskreten Fouriertransformation	44
3.2.3	Trigonometrische Interpolation, Teil 1	45
3.2.4	Trigonometrische Interpolation, Teil 2	46
3.2.5	Trigonometrische Interpolation, Teil 3	46
3.2.6	Interpolierende reelle trigonometrische Polynome	48
3.3	Schnelle Fouriertransformation (FFT)	50
3.3.1	Einführende Bemerkungen	50
3.3.2	Der grundlegende Zusammenhang	50
3.3.3	Bit-Umkehr	52
3.3.4	Der FFT-Algorithmus in der Situation $N = 2^q$	53
3.3.5	Aufwandsbetrachtungen für den FFT-Algorithmus	55
3.3.6	Pseudocode für den FFT-Algorithmus in der Situation $N = 2^q$	56
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	56
-	Übungsaufgaben	57
4	Lösung linearer Gleichungssysteme	61
4.1	Gestaffelte lineare Gleichungssysteme	62
4.1.1	Obere gestaffelte Gleichungssysteme	63
4.1.2	Untere gestaffelte Gleichungssysteme	63
4.2	Der Gauß-Algorithmus	64
4.2.1	Einführende Bemerkungen	64
4.2.2	Gauß-Algorithmus mit Pivotsuche	67
4.3	Die Faktorisierung $PA = LR$	68
4.3.1	Permutationsmatrix	68
4.3.2	Eliminationsmatrizen	70
4.3.3	Die Faktorisierung $PA = LR$	72
4.4	LR -Faktorisierung	75
4.5	Cholesky-Faktorisierung positiv definiter Matrizen	76
4.5.1	Grundbegriffe	76
4.5.2	Die Berechnung einer Faktorisierung $A = LL^T$ für positiv definite Matrizen $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$	79
4.5.3	Eine Klasse positiv definiter Matrizen	80
4.6	Bandmatrizen	81
4.7	Normen und Fehlerabschätzungen	82
4.7.1	Normen	83
4.7.2	Spezielle Matrixnormen	86
4.7.3	Die Konditionszahl einer Matrix	90
4.7.4	Störungsergebnisse für Matrizen	90
4.7.5	Fehlerabschätzungen für fehlerbehaftete Gleichungssysteme	92
4.8	Orthogonalisierungsverfahren	93
4.8.1	Elementare Eigenschaften orthogonaler Matrizen	93
4.8.2	Die Faktorisierung $A = QR$ mittels Gram-Schmidt-Orthogonalisierung	94

4.8.3	Die Faktorisierung $A = QS$ mittels Householder-Transformationen	95
4.8.4	Anwendung 1: Stabile Lösung schlecht konditionierter Gleichungssysteme $Ax = b$	99
4.8.5	Anwendung 2: Lineare Ausgleichsrechnung	99
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	102
-	Übungsaufgaben	103
5	Iterative Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	109
5.1	Vorbemerkungen	109
5.2	Der eindimensionale Fall	111
5.2.1	Ein allgemeines Resultat	111
5.2.2	Das Newton-Verfahren im eindimensionalen Fall	112
5.3	Der banachsche Fixpunktsatz	115
5.4	Das Newton-Verfahren im mehrdimensionalen Fall	118
5.4.1	Einige Begriffe aus der Analysis	118
5.4.2	Das Newton-Verfahren und seine Konvergenz	120
5.4.3	Nullstellenbestimmung bei Polynomen	122
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	126
-	Übungsaufgaben	127
6	Numerische Integration von Funktionen	131
6.1	Interpolatorische Quadraturformeln	132
6.2	Spezielle interpolatorische Quadraturformeln	133
6.2.1	Abgeschlossene Newton-Cotes-Formeln	133
6.2.2	Andere interpolatorische Quadraturformeln	135
6.3	Der Fehler bei der interpolatorischen Quadratur	136
6.4	Genauigkeit abgeschlossener Newton-Cotes-Formeln	139
6.4.1	Der Beweis von Lemma 6.16	141
6.5	Summierte Quadraturformeln	143
6.5.1	Summierte Rechteckregeln	144
6.5.2	Summierte Trapezregel	145
6.5.3	Summierte Simpson-Regel	145
6.6	Asymptotik der summierten Trapezregel	147
6.6.1	Die Asymptotik	147
6.7	Extrapolationsverfahren	147
6.7.1	Grundidee	147
6.7.2	Neville-Schema	148
6.7.3	Verfahrensfehler bei der Extrapolation	149
6.8	Gaußsche Quadraturformeln	151
6.8.1	Einleitende Bemerkungen	151
6.8.2	Orthogonale Polynome	152
6.8.3	Optimale Wahl der Stützstellen und Gewichte	155
6.8.4	Nullstellen von orthogonalen Polynomen als Eigenwerte	158
6.9	Beweis der Asymptotik für die summierte Trapezregel	160
6.9.1	Bernoulli-Polynome	160

6.9.2	Der Beweis von Theorem 6.24	161
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	163
-	Übungsaufgaben	164
7	Einschrittverfahren für Anfangswertprobleme	167
7.1	Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz	169
7.2	Theorie der Einschrittverfahren	171
7.2.1	Ein elementares Resultat zur Fehlerakkumulation	173
7.3	Spezielle Einschrittverfahren	173
7.3.1	Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 1$	173
7.3.2	Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 2$	174
7.3.3	Einschrittverfahren der Konsistenzordnung $p = 4$	176
7.4	Rundungsfehleranalyse	177
7.5	Asymptotische Entwicklung der Approximationen	178
7.5.1	Einführende Bemerkungen	178
7.5.2	Herleitung der asymptotischen Entwicklung des globalen Verfahrensfehlers, 1. Teil	180
7.5.3	Herleitung der asymptotischen Entwicklung des globalen Verfahrensfehlers, 2. Teil	181
7.5.4	Asymptotische Entwicklungen des lokalen Verfahrensfehlers	184
7.6	Extrapolationsmethoden für Einschrittverfahren	185
7.7	Schrittweitensteuerung	188
7.7.1	Verfahrensvorschrift	188
7.7.2	Problemstellung	188
7.7.3	Vorgehensweise bei gegebener Testschrittweite $h^{(k)}$	189
7.7.4	Bestimmung einer neuen Testschrittweite $h^{(k+1)}$ im Fall $\delta^{(k)} > \varepsilon$	190
7.7.5	Pseudocode zur Schrittweitensteuerung	191
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	192
-	Übungsaufgaben	192
8	Mehrschrittverfahren für Anfangswertprobleme	197
8.1	Grundlegende Begriffe	197
8.1.1	Mehrschrittverfahren	197
8.1.2	Konvergenz- und Konsistenzordnung	198
8.1.3	Nullstabilität, Lipschitzbedingung	199
8.1.4	Übersicht	200
8.2	Der globale Verfahrensfehler bei Mehrschrittverfahren	200
8.2.1	Das Konvergenztheorem	200
8.2.2	Hilfsresultat 1: Das Lemma von Gronwall	203
8.2.3	Beschränktheit der Matrixfolge $A, A^2, A^3, \dots$	205
8.2.4	Die Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren	206
8.3	Spezielle lineare Mehrschrittverfahren – Vorbereitungen	208
8.4	Adams-Verfahren	211
8.4.1	Der Ansatz	211
8.4.2	Adams-Bashfort-Verfahren	211
8.4.3	Adams-Moulton-Verfahren	214

8.5	Nyström- und Milne-Simpson-Verfahren	216
8.5.1	Der Ansatz	216
8.5.2	Nyström-Verfahren	217
8.5.3	Milne-Simpson-Verfahren	218
8.6	BDF-Verfahren	220
8.6.1	Der Ansatz	220
8.6.2	Tabellarische Übersicht über spezielle Mehrschrittverfahren . .	222
8.7	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	223
8.7.1	Linearer Prädiktor/Linearer Korrektor	227
8.8	Lineare homogene Differenzengleichungen	228
8.8.1	Die Testgleichung	228
8.8.2	Existenz und Eindeutigkeit bei linearen homogenen Differenzengleichungen	228
8.8.3	Die komplexwertige allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung $Lu = 0$	229
8.8.4	Die reellwertige allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung $Lu = 0$	233
8.8.5	Eine spezielle Differenzengleichung	234
8.9	Steife Differenzialgleichungen	237
8.9.1	Einführende Bemerkungen	237
8.9.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bei Anfangswertproblemen für Differenzialgleichungen mit oberer Lipschitzeigenschaft	239
8.9.3	Das implizite Euler-Verfahren für steife Differenzialgleichungen	242
8.9.4	Steife Differenzialgleichungen in den Anwendungen	244
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	245
-	Übungsaufgaben	246
9	Randwertprobleme	253
9.1	Problemstellung, Existenz, Eindeutigkeit	253
9.1.1	Problemstellung	253
9.1.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	255
9.2	Differenzenverfahren	256
9.2.1	Numerische Differenziation	256
9.2.2	Der Ansatz für Differenzenverfahren	257
9.2.3	Das Konvergenzresultat für Differenzenverfahren	259
9.2.4	Vorbereitungen für den Beweis von Teil a) des Theorems 9.11 .	260
9.2.5	Nachweis der Aussage in Teil a) von Theorem 9.11	265
9.3	Galerkin-Verfahren	265
9.3.1	Einführende Bemerkungen	266
9.3.2	Eigenschaften des Differenzialoperators $\mathcal{L}u = -u'' + ru$	266
9.3.3	Galerkin-Verfahren - ein allgemeiner Ansatz	269
9.3.4	Systemmatrix	272
9.3.5	Finite-Elemente-Methode	273
9.3.6	Anwendungen	275
9.3.7	Das Energiefunktional	277

9.4	Einfachschießverfahren	278
9.4.1	Numerische Realisierung des Einfachschießverfahrens mit dem Newton-Verfahren	279
9.4.2	Numerische Realisierung des Einfachschießverfahrens mit ei- ner Fixpunktiteration	280
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	280
-	Übungsaufgaben	281
10	Gesamtschritt-, Einzelschritt- und Relaxationsverfahren	287
10.1	Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	287
10.1.1	Hintergrund zum Einsatz iterativer Verfahren bei linearen Glei- chungssystemen	287
10.2	Lineare Fixpunktiteration	288
10.2.1	Ein Modellbeispiel	290
10.3	Einige spezielle Klassen von Matrizen	292
10.3.1	Irreduzible Matrizen	292
10.4	Das Gesamtschrittverfahren	294
10.5	Das Einzelschrittverfahren	296
10.5.1	Der Betrag einer Matrix	297
10.5.2	Konvergenzergebnisse für das Einzelschrittverfahren	298
10.6	Das Relaxationsverfahren und erste Konvergenzresultate	300
10.6.1	M-Matrizen	302
10.7	Relaxationsverfahren für konsistent geordnete Matrizen	304
-	Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	309
-	Übungsaufgaben	310
11	CG- und GMRES-Verfahren	315
11.1	Vorbetrachtungen	315
11.1.1	Ausblick	316
11.2	Der Ansatz des orthogonalen Residuums	316
11.2.1	Existenz, Eindeutigkeit und Minimaleigenschaft	317
11.2.2	Der Ansatz des orthogonalen Residuums (11.2) für gegebene A - konjugierte Basen	318
11.3	Das CG-Verfahren für positiv definite Matrizen	320
11.3.1	Einleitende Bemerkungen	320
11.3.2	Die Berechnung A -konjugierter Suchrichtungen in $\mathcal{K}_n(A, b)$	320
11.3.3	Der Algorithmus zum CG-Verfahren	322
11.4	Die Konvergenzgeschwindigkeit des CG-Verfahrens	323
11.5	Das CG-Verfahren für die Normalgleichungen	326
11.6	Arnoldi-Prozess	327
11.6.1	Vorbetrachtungen zum GMRES-Verfahren	327
11.6.2	Arnoldi-Prozess	328
11.7	GMRES auf der Basis des Arnoldi-Prozesses	331
11.7.1	Einführende Bemerkungen	331
11.7.2	Allgemeine Vorgehensweise zur Lösung des betrachteten Mini- mierungsproblems	332

11.7.3 Detaillierte Beschreibung der Vorgehensweise zur Lösung des betrachteten Minimierungsproblems	333
11.7.4 MATLAB-Programm für GMRES	335
11.8 Konvergenzgeschwindigkeit des GMRES-Verfahrens	336
11.9 Nachtrag 1: Krylovräume	337
11.10 Nachtrag 2: Programmsysteme mit Multifunktionalität	338
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	339
- Übungsaufgaben	339
12 Eigenwertprobleme	341
12.1 Einleitung	341
12.2 Störungstheorie für Eigenwertprobleme	342
12.2.1 Diagonalisierbare Matrizen	342
12.2.2 Der allgemeine Fall	344
12.3 Lokalisierung von Eigenwerten	346
12.4 Variationssätze für symmetrische Eigenwertprobleme	348
12.5 Störungsergebnisse für Eigenwerte symmetrischer Matrizen	350
12.6 Nachtrag: Faktorisierungen von Matrizen	351
12.6.1 Symmetrische Matrizen	351
12.6.2 Diagonalisierbare Matrizen	352
12.6.3 Schur-Faktorisierung	352
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	352
- Übungsaufgaben	352
13 Numerische Verfahren für Eigenwertprobleme	357
13.1 Einführende Bemerkungen	357
13.1.1 Ähnlichkeitstransformationen	357
13.1.2 Vektoriteration	358
13.2 Transformation auf Hessenbergform	359
13.2.1 Householder-Ähnlichkeitstransformationen zur Gewinnung von Hessenbergmatrizen	359
13.2.2 Der symmetrische Fall	361
13.3 Newton-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten	362
13.3.1 Der nichtsymmetrische Fall. Die Methode von Hyman	362
13.3.2 Das Newton-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte tridiagonaler Matrizen	364
13.4 Das Jacobi-Verfahren für symmetrische Matrizen	366
13.4.1 Approximation der Eigenwerte durch Diagonaleinträge	366
13.4.2 Givensrotationen zur Reduktion der Nichtdiagonaleinträge	367
13.4.3 Zwei spezielle Jacobi-Verfahren	370
13.5 Das QR -Verfahren	372
13.5.1 Eindeutigkeit und Stetigkeit der QR -Faktorisierung einer Matrix	372
13.5.2 Definition des QR -Verfahrens	375
13.5.3 Konvergenz des QR -Verfahrens für betragsmäßig einfache Eigenwerte	377

13.5.4 Praktische Durchführung des QR -Verfahrens für Hessenberg-matrizen	380
13.6 Das LR -Verfahren	385
13.7 Die Vektoriteration	385
13.7.1 Definition und Eigenschaften der Vektoriteration	385
13.7.2 Spezielle Vektoriterationen	387
– Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	388
– Übungsaufgaben	388
14 Restglieddarstellung nach Peano	391
14.1 Einführende Bemerkungen	391
14.2 Peano-Kerne	392
14.3 Anwendungen	394
14.3.1 Interpolation	394
14.3.2 Numerische Integration	395
– Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	395
– Übungsaufgaben	395
15 Approximationstheorie	397
15.1 Einführende Bemerkungen	397
15.2 Existenz eines Proximums	398
15.3 Eindeutigkeit eines Proximums	400
15.3.1 Einige Notationen; streng konvexe Mengen	400
15.3.2 Strikt normierte Räume	401
15.4 Approximationstheorie in Räumen mit Skalarprodukt	403
15.4.1 Einige Grundlagen	403
15.4.2 Proxima in linearen Unterräumen	404
15.5 Π_{n-1} -Proxima bzgl. Maximumnormen	406
15.6 Anwendungen des Alternantensatzes	409
15.6.1 Ein Beispiel	409
15.6.2 Eine erste Anwendung des Alternantensatzes	410
15.6.3 Eine zweite Anwendung des Alternantensatzes	411
15.7 Haarsche Räume, Tschebyscheff-Systeme	412
15.7.1 Alternantensatz für haarsche Räume	413
15.7.2 Eindeutigkeit des Proximums	414
15.7.3 Untere Schranken für den Minimalabstand	414
– Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	415
– Übungsaufgaben	415
16 Rechnerarithmetik	417
16.1 Zahlendarstellungen	417
16.2 Allgemeine Gleitpunkt-Zahlensysteme	418
16.2.1 Grundlegende Begriffe	418
16.2.2 Struktur des normalisierten Gleitpunkt-Zahlensystems $\mathbb{F}$	419
16.2.3 Struktur des denormalisierten Gleitpunkt-Zahlensystems $\hat{\mathbb{F}}$	421
16.3 Gleitpunkt-Zahlensysteme in der Praxis	422

16.3.1 Die Gleitpunktzahlen des Standards IEEE 754	422
16.3.2 Weitere Gleitpunkt-Zahlensysteme in der Praxis	424
16.4 Runden, Abschneiden	425
16.4.1 Runden	425
16.4.2 Abschneiden	427
16.5 Arithmetik in Gleitpunkt-Zahlensystemen	428
16.5.1 Arithmetische Grundoperationen in Gleitpunkt-Zahlensystemen	429
16.5.2 Fehlerakkumulation bei der Hintereinanderausführung von Multiplikationen und Divisionen in Gleitpunkt-Zahlensystemen . .	429
16.5.3 Fehlerverstärkung bei der Hintereinanderausführung von Additionen in einem gegebenen Gleitpunkt-Zahlensystem F	431
- Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise	433
Literaturverzeichnis	435
Index	441