

Tilo Arens Rolf Busam Frank Hettlich Christian Karpfinger Hellmuth Stachel

Grundwissen Mathematikstudium

Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen

mit Beiträgen von Klaus Lichtenegger

2. Auflage

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V	5.3 Das Lösungskriterium und die Struktur der Lösung	180
1 Mathematik – eine Wissenschaft für sich	1	Zusammenfassung	185
1.1 Über Mathematik, Mathematiker und dieses Lehrbuch	2	Aufgaben	186
1.2 Die didaktischen Elemente dieses Buchs	8	6 Vektorräume – von Basen und Dimensionen	189
1.3 Ratschläge zum Einstieg in die Mathematik	10	6.1 Der Vektorraumbegriff	190
1.4 Eine kurze Geschichte der Mathematik ...	13	6.2 Beispiele von Vektorräumen	193
2 Logik, Mengen, Abbildungen – die Sprache der Mathematik	27	6.3 Untervektorräume	196
2.1 Junktoren und Quantoren	28	6.4 Basis und Dimension	198
2.2 Grundbegriffe aus der Mengenlehre	34	6.5 Summe und Durchschnitt von Unter- vektorräumen	211
2.3 Abbildungen	40	Zusammenfassung	222
2.4 Relationen	49	Aufgaben	223
Zusammenfassung	58	7 Analytische Geometrie – Rechnen statt Zeichnen	227
Aufgaben	60	7.1 Punkte und Vektoren im Anschauungsraum	228
3 Algebraische Strukturen – ein Blick hinter die Rechenregeln	63	7.2 Das Skalarprodukt im Anschauungsraum .	232
3.1 Gruppen	64	7.3 Weitere Produkte von Vektoren im Anschauungsraum	238
3.2 Homomorphismen	71	7.4 Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen	247
3.3 Körper	78	7.5 Wechsel zwischen kartesischen Koordinatensystemen	257
3.4 Ringe	85	Zusammenfassung	268
Zusammenfassung	95	Aufgaben	270
Aufgaben	97	8 Folgen – der Weg ins Unendliche	275
4 Zahlbereiche – Basis der gesamten Mathematik	101	8.1 Der Begriff einer Folge	276
4.1 Der Körper der reellen Zahlen	102	8.2 Konvergenz	283
4.2 Anordnungsaxiome für die reellen Zahlen	106	8.3 Häufungspunkte und Cauchy-Folgen	291
4.3 Ein Vollständigkeitsaxiom	114	Zusammenfassung	299
4.4 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	117	Aufgaben	300
4.5 Ganze Zahlen und rationale Zahlen	127	9 Funktionen und Stetigkeit – ε trifft auf δ	303
4.6 Komplexe Zahlen	134	9.1 Grundlegendes zu Funktionen	304
4.7 Vertiefung: Konstruktiver Aufbau der reellen Zahlen	148	9.2 Beschränkte und monotone Funktionen ..	310
Zusammenfassung	155	9.3 Grenzwerte für Funktionen und die Stetigkeit	313
Aufgaben	156	9.4 Abgeschlossene, offene, kompakte Mengen	322
5 Lineare Gleichungssysteme – ein Tor zur linearen Algebra	165	9.5 Stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich, Zwischenwertsatz.....	330
5.1 Erste Lösungsversuche	166	Zusammenfassung	341
5.2 Das Lösungsverfahren von Gauß und Jordan	172	Aufgaben	342

10 Reihen – Summieren bis zum Letzten	347	14.8 Die Berechnung einer Jordan-Normalform und Jordan-Basis	532
10.1 Motivation und Definition	348	14.9 Das Minimalpolynom einer Matrix	544
10.2 Kriterien für Konvergenz	355	Zusammenfassung	548
10.3 Absolute Konvergenz	363	Aufgaben	550
10.4 Kriterien für absolute Konvergenz	368		
Zusammenfassung	376	15 Differenzialrechnung – die Linearisierung von Funktionen	555
Aufgaben	377	15.1 Die Ableitung	556
11 Potenzreihen – Alleskönner unter den Funktionen	381	15.2 Differenziationsregeln	564
11.1 Definition und Grundlagen	382	15.3 Der Mittelwertsatz	573
11.2 Die Darstellung von Funktionen durch Potenzreihen	389	15.4 Verhalten differenzierbarer Funktionen	581
11.3 Die Exponentialfunktion	398	15.5 Taylorreihen	587
11.4 Trigonometrische Funktionen	403	Zusammenfassung	597
11.5 Der Logarithmus	408	Aufgaben	598
Zusammenfassung	413	16 Integrale – von lokal zu global	603
Aufgaben	414	16.1 Integration von Treppenfunktionen	604
12 Lineare Abbildungen und Matrizen – Brücken zwischen Vektorräumen	417	16.2 Das Lebesgue-Integral	608
12.1 Definition und Beispiele	418	16.3 Stammfunktionen	617
12.2 Verknüpfungen von linearen Abbildungen	422	16.4 Integrationstechniken	622
12.3 Kern, Bild und die Dimensionsformel	425	16.5 Integration über unbeschränkte Intervalle oder Funktionen	627
12.4 Darstellungsmatrizen	432	16.6 Parameterabhängige Integrale	638
12.5 Das Produkt von Matrizen	442	16.7 Weitere Integrationsbegriffe	642
12.6 Das Invertieren von Matrizen	446	Zusammenfassung	654
12.7 Elementarmatrizen	451	Aufgaben	655
12.8 Basistransformation	455	17 Euklidische und unitäre Vektorräume – orthogonales Diagonalisieren	659
12.9 Der Dualraum	458	17.1 Euklidische Vektorräume	660
Zusammenfassung	462	17.2 Norm, Abstand, Winkel, Orthogonalität	666
Aufgaben	464	17.3 Orthonormalbasen und orthogonale Komplemente	672
13 Determinanten – Kenngrößen von Matrizen	469	17.4 Unitäre Vektorräume	682
13.1 Die Definition der Determinante	470	17.5 Orthogonale und unitäre Endomorphismen	685
13.2 Determinanten von Endomorphismen	475	17.6 Selbstadjungierte Endomorphismen	695
13.3 Berechnung der Determinante	476	17.7 Normale Endomorphismen	701
13.4 Anwendungen der Determinante	483	Zusammenfassung	709
Zusammenfassung	492	Aufgaben	712
Aufgaben	494	18 Quadriken – vielseitig nutzbare Punktmengen	717
14 Normalformen – Diagonalisieren und Triangulieren	497	18.1 Symmetrische Bilinearformen	718
14.1 Diagonalisierbarkeit	498	18.2 Hermitesche Sesquilinearformen	728
14.2 Eigenwerte und Eigenvektoren	501	18.3 Quadriken und ihre Hauptachsen- transformation	732
14.3 Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren	503	18.4 Die Singulärwertzerlegung	745
14.4 Algebraische und geometrische Vielfachheit	510	18.5 Die Pseudoinverse einer linearen Abbildung	747
14.5 Die Exponentialfunktion für Matrizen	519	Zusammenfassung	757
14.6 Das Triangulieren von Endomorphismen	522	Aufgaben	758
14.7 Die Jordan-Normalform	526		

19	Metrische Räume – Zusammenspiel von Analysis und lineare Algebra	763	23	Vektoranalysis – im Zentrum steht der Gauß'sche Satz	957
19.1	Metrische Räume und ihre Topologie	764	23.1	Kurven im $\mathbb{R}^n$	958
19.2	Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen	772	23.2	Das Kurvenintegral	966
19.3	Kompaktheit	787	23.3	Flächen und Flächenintegrale	974
19.4	Zusammenhangsbegriffe	797	23.4	Der Gauß'sche Satz	986
19.5	Vollständigkeit	802		Zusammenfassung	1009
19.6	Banach- und Hilberträume	808		Aufgaben	1010
	Zusammenfassung	823	24	Optimierung – aber mit Nebenbedingungen	1015
	Aufgaben	825	24.1	Lineare Optimierung	1016
20	Differenzialgleichungen – Funktionen sind gesucht	829	24.2	Das Simplex-Verfahren	1026
20.1	Begriffsbildungen	830	24.3	Dualitätstheorie	1034
20.2	Elementare analytische Techniken	839	24.4	Differenzierbare Probleme	1043
20.3	Existenz und Eindeutigkeit	847		Zusammenfassung	1051
20.4	Grundlegende numerische Verfahren	854		Aufgaben	1052
	Zusammenfassung	860	25	Elementare Zahlentheorie – Teiler und Vielfache	1057
	Aufgaben	861	25.1	Teilbarkeit	1058
21	Funktionen mehrerer Variablen – Differenzieren im Raum	865	25.2	Der euklidische Algorithmus	1059
21.1	Einführung	866	25.3	Der Fundamentalsatz der Arithmetik	1063
21.2	Differenzierbarkeitsbegriffe: Totale und partielle Differenzierbarkeit	867	25.4	ggT und kgV	1064
21.3	Differenziationsregeln	881	25.5	Zahlentheoretische Funktionen	1067
21.4	Mittelwertsätze und Schrankensätze	889	25.6	Rechnen mit Kongruenzen	1073
21.5	Höhere partielle Ableitungen und der Vertauschungssatz von H. A. Schwarz	891		Zusammenfassung	1080
21.6	Taylor-Formel und lokale Extrema	895		Aufgaben	1081
21.7	Der lokale Umkehrsatz	901	26	Elemente der diskreten Mathematik – die Kunst des Zählens	1085
21.8	Der Satz über implizite Funktionen	907	26.1	Einführung in die Graphentheorie	1086
	Zusammenfassung	911	26.2	Einführung in die Kombinatorik	1100
	Aufgaben	914	26.3	Erzeugende Funktionen	1107
22	Gebietsintegrale – das Ausmessen von Mengen	919		Zusammenfassung	1111
22.1	Definition und Eigenschaften	920		Aufgaben	1113
22.2	Die Berechnung von Gebietsintegralen	928		Hinweise zu den Aufgaben	1117
22.3	Die Transformationsformel	938		Lösungen zu den Aufgaben	1135
22.4	Wichtige Koordinatensysteme	944		Bildnachweis	1151
	Zusammenfassung	952		Symbolglossar deutsch/englisch	1153
	Aufgaben	953		Index	1171