

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
	Thomas Bedürftig, Peter Baumann und Volkhardt Fuhrmann	
2	Einführung der Elemente	5
	Thomas Bedürftig	
2.1	Folgen, reelle Zahlen und Grenzwerte	6
2.1.1	Folgen	6
2.1.2	Folgen und reelle Zahlen	7
2.1.3	Grenzwerte	8
2.2	Infinitesimale Zahlen und Standardteil	10
2.2.1	Folgen und infinitesimale Zahlen	10
2.2.2	Rechnen mit infinitesimalen Zahlen, hyperreelle Zahlen, Standardteil	12
2.3	Funktionen, Folgen und Stetigkeit	14
2.3.1	Standard	14
2.3.2	Nonstandard	15
2.4	Ableitung und Differentialquotient – standard und nonstandard	16
2.4.1	Nonstandard	16
2.4.2	Standard	18
2.5	Integral	20
2.5.1	Standard	20
2.5.2	Nonstandard	22
2.6	Anwendungen – standard und nonstandard	24
2.6.1	Produktregel	24
2.6.2	Kettenregel	25
2.6.3	Hauptsatz	26
2.7	Zur Entwicklung der Begriffe	28
3	Axiomatik	31
	Thomas Bedürftig	
3.1	Zur Axiomatik der reellen Zahlen	31
3.1.1	Axiome	32
3.2	Zur Axiomatik der hyperreellen Zahlen	33
3.2.1	Begriffe, Bezeichnungen, Axiome	33

4	Zur Konstruktion der reellen und hyperreellen Zahlen	35
	Thomas Bedürftig	
4.1	Einleitung	35
4.2	Konstruktion der reellen Zahlen.	36
4.2.1	Schritte der Konstruktion	37
4.3	Hyperreelle Zahlen.	40
4.3.1	Hypernatürliche Zahlen	40
4.3.2	Konstruktion der hyperreellen Zahlen	41
4.3.3	Zwei Probleme.	42
4.4	Problemlösung	43
4.4.1	Über Mengenfilter zu einem angeordneten Körper	44
4.4.2	Anordnung und Beispiele.	45
4.4.3	Anhang: Zornsches Lemma und Auswahlaxiom	46
5	Über den Grenzwertbegriff	49
	Thomas Bedürftig	
5.1	Vorbemerkungen	49
5.2	Reelle Zahlen und Grenzwerte.	50
5.3	Spezielle Grenzwerte	52
5.3.1	Unendliche Dezimalbrüche	52
5.3.2	Intervallschachtelungen	54
5.3.3	Folge und Grenzwert	55
5.3.4	0,999	56
5.3.5	Unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche	57
5.4	Die Situation beim Einstieg in die Analysis.	59
5.4.1	Folgen und Grenzwerte	60
5.4.2	Funktionen und Grenzwerte.	61
5.5	Zusammenfassung	63
6	Unendlichkeitslupe und infinite Vergrößerung	65
	Karl Kuhlemann	
6.1	Motivation	65
6.2	Vergrößerung als didaktisches Instrument in der Analysis	66
6.3	Mathematischer Hintergrund	69
6.4	Die Grenzen der Vergrößerungstechnik.	70
6.5	Ergänzungen zur Integralrechnung	72
6.6	Fazit	76
7	Die Grundproblematik der Stetigkeit	79
	Thomas Bedürftig und Stefan Basiner	
7.1	Vorstellungen	80
7.2	Propädeutischer Grenzwertbegriff	80
7.3	Infinitesimale Definition	81
7.4	Zur Begriffsbildung der Stetigkeit im Unterricht.	82
7.4.1	Erfahrungsfelder.	83
7.4.2	Zur Didaktik des Grenzwertbegriffs	84
7.4.3	Schlussbemerkung	85

8	Aus der Geschichte	87
	Thomas Bedürftig	
8.1	Einleitung	87
8.1.1	Grenzwert oder infinitesimaler Abstand?	87
8.2	Leibniz' Infinitesimalien	88
8.2.1	Fiktion?	89
8.2.2	Anschauung	90
8.2.3	Anmerkung	92
8.3	Infinitesimalien oder Grenzwerte?	92
8.3.1	Cauchy	93
8.3.2	Weierstraß	94
8.3.3	Beobachtungen	95
8.3.4	Auf dem Weg in die Mengenlehre	96
8.3.5	Das Ende der Infinitesimalien	96
8.3.6	Wende im Denken	97
8.4	Die Rückkehr der Infinitesimalien	98
8.4.1	Infinitesimales in der Schule?	98
8.4.2	Höhere Mathematik	100
8.4.3	Woher kommt das Infinitesimale zurück?	101
8.4.4	Wie kommen die Infinitesimalien zurück?	102
8.5	Zur Situation heute	104
8.5.1	Infinitesimale Zahlen und Grenzwerte	104
8.5.2	Widerstände	105
8.6	Schluss	106
9	Grenzwert von Folgen und Standardteil	109
	Thomas Bedürftig	
9.1	Zusammenhang	109
9.2	Kommentar	111
9.3	Folgen mit infiniten Folgengliedern	112
9.4	Anwendung	113
10	Limes im Hyperreellen	115
	Stefan Basiner und Thomas Bedürftig	
10.1	Folggrenzwert	115
10.2	ε - δ -Grenzwert	116
10.3	Limesschreibweisen hyperreell geschrieben	118
10.4	Anwendung	119
11	Weitere Beispiele im Vergleich	121
	Stefan Basiner, Wilfried Lingenberg und Peter Baumann	
11.1	Elementare Sätze	121
11.1.1	Nullstellensatz	121
11.1.2	Satz von Bolzano-Weierstraß	123
11.1.3	Extremwerte	125

11.2	Substitution	125
11.2.1	Hyperreelle Begründung	127
11.2.2	Beispiele.	128
11.3	Exponentialfunktionen und Eulersche Zahl.	131
11.3.1	Die Vorkenntnisse.	131
11.3.2	Ansatz der Reihenentwicklung	132
11.3.3	Fragen.	132
11.3.4	Antworten.	133
11.4	Konvergenzkriterien anhand besonderer Folgen und Reihen . . .	135
11.4.1	Vorbereitungen	135
11.4.2	Sätze und Beweise nonstandard.	137
11.4.3	Einige Standard-Beweise	140
12	Rückblick, Vergleich, Schluss	143
	Thomas Bedürftig	
12.1	Rückblick	143
12.2	Vergleich	145
12.3	Schluss	149
	Literatur.	153
	Stichwortverzeichnis.	157