DMK | Deutschschweizerische Mathematikkommission des VSMP
(Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte)

Analysis

Aufgaben

orell füssli
verlag

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Reihen **1**

1.1 Einführung . . . 1

1.2 Verschiedene Typen von Folgen und Reihen . . . 4

Arithmetische Folgen und Reihen . . . 4

Geometrische Folgen und Reihen . . . 7

1.3 Unendliche geometrische Folgen und Reihen . . . 11

1.4 Weitere Themen . . . 14

Arithmetische Folgen und Reihen höherer Ordnung . . . 14

Die Koch-Kurve und die Koch-Schneeflocke . . . 16

Anwendung in der Finanzmathematik . . . 18

Die Fibonacci-Zahlen . . . 19

Vollständige Induktion . . . 21

1.5 Vermischte Aufgaben . . . 24

1.6 Kontrollaufgaben . . . 28

2 Grenzwerte **30**

2.1 Grenzwerte von Folgen . . . 30

2.2 Grenzwerte von Funktionen . . . 35

Grenzwert einer Funktion für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ . . . 35

Grenzwert einer Funktion an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ . . . 38

2.3 Weitere Themen . . . 41

Weitere Eigenschaften von Folgen sowie Sätze über konvergente Folgen und Reihen . 41

Rechts- und linksseitiger Grenzwert einer Funktion an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ . . . 43

2.4 Vermischte Aufgaben . . . 45

Zu Kapitel 2.1: Grenzwerte von Folgen . . . 45

Zu Kapitel 2.2: Grenzwerte von Funktionen . . . 46

2.5 Kontrollaufgaben . . . 47

Zu Kapitel 2.1: Grenzwerte von Folgen . . . 47

Zu Kapitel 2.2: Grenzwerte von Funktionen . . . 48

3 Differentialrechnung **49**

3.1 Einleitung . . . 49

3.2 Graphisches Ableiten . . . 57

3.3 Ableitungsregeln . . . 60

Summen-, Faktor- und Potenzregel . . . 60

Produkt- und Quotientenregel . . . 62

Höhere Ableitungen I . . . 63

Kettenregel . . . 65

Winkel-, Exponential- und Logarithmusfunktionen 66
Höhere Ableitungen II 68
Erste Anwendungen 69
Erste Bekanntschaft mit Differentialgleichungen 72
3.4 Tangente, Normale und Schnittwinkel 74
Polynomfunktionen 74
Allgemeinere Funktionen 77
3.5 Spezielle Punkte und Eigenschaften von Kurven 79
Polynomfunktionen 81
Weitere Funktionen 84
3.6 Aufstellen von Funktionsgleichungen 86
Polynomfunktionen 86
Weitere Funktionen 88
Welcher Funktionsansatz führt zum Ziel? 89
3.7 Extremwertaufgaben 90
Einfache Funktionen 90
Weitere Funktionstypen 93
Ökonomische Anwendungen 95
3.8 Weitere Themen 96
Besondere Symmetrieeigenschaften von Polynomfunktionen 2., 3. und 4. Grades . . . 96
Implizites Differenzieren 98
Näherungsverfahren nach Newton 100
Lineare Approximation 101
Taylorreihe und Taylorpolynome 102
3.9 Vermischte Aufgaben 105
Zu Kapitel 3.1: Einleitung 105
Zu Kapitel 3.3: Ableitungsregeln 106
Zu Kapitel 3.4: Tangente, Normale und Schnittwinkel 108
Zu Kapitel 3.5, 3.6 und 3.7: Extrema und noch mehr 109
3.10 Kontrollaufgaben 111
Zu Kapitel 3.1 und 3.2: Einleitung und graphisches Ableiten 111
Zu Kapitel 3.3: Ableitungsregeln 113
Zu Kapitel 3.4: Tangente, Normale und Schnittwinkel 114
Zu Kapitel 3.5: Spezielle Punkte und Eigenschaften von Kurven 115
Zu Kapitel 3.6: Aufstellen von Funktionsgleichungen 116
Zu Kapitel 3.7: Extremwertaufgaben 116

4 Integralrechnung **118**

4.1 Das Integral als Umkehrung des Differenzierens 118
Integrieren und Stammfunktion 118
Das unbestimmte Integral 120
Weg als Stammfunktion 122
4.2 Flächenberechnung anhand von Unter- und Obersummen 124
Das bestimmte Integral 129
4.3 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 132
4.4 Unterschiedliche Bedeutungen des Integrals 135
Flächeninhalt 135
Volumen 140
Mittelwert einer Funktion 143
4.5 Uneigentliche Integrale 145
4.6 Breitgefächerte Anwendungen 147
Geometrie 147
Physik 148
Medizin/Biologie 150
Wirtschaft 151
4.7 Differentialgleichungen 152
Allgemeines 152
Modellierungsaufgaben 157
4.8 Weitere Themen 160
Substitutionsmethode 160
Partielle Integration 161
Bogenlänge 163
4.9 Vermischte Aufgaben 164
Zu Kapitel 4.1: Das Integral als Umkehrung des Differenzierens 164
Zu Kapitel 4.2: Flächenberechnung anhand von Unter- und Obersummen 165
Zu Kapitel 4.3: Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 166
Zu Kapitel 4.4: Unterschiedliche Bedeutungen des Integrals 167
Zu Kapitel 4.5: Uneigentliche Integrale 170
Zu Kapitel 4.7: Differentialgleichungen 171

4.10 Kontrollaufgaben 171
Zu Kapitel 4.1: Das Integral als Umkehrung des Differenzierens 171
Zu Kapitel 4.2: Flächenberechnung anhand von Unter- und Obersummen 172
Zu Kapitel 4.3: Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 173
Zu Kapitel 4.4: Unterschiedliche Bedeutungen des Integrals 173
Zu Kapitel 4.5: Uneigentliche Integrale 175
Zu Kapitel 4.7: Differentialgleichungen 175

X Funktionen **176**
X.1 Grundlagen 176
Monotonie und Beschränktheit 183
Stetigkeit 184
X.2 Weitere Aspekte im Zusammenhang mit Funktionen 186
Verkettungen 186
Transformationen 189
Symmetrie und Periodizität 192
Umkehrfunktionen 196
X.3 Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen) 199
Grundlagen und Symmetrie 199
Globalverhalten 201
Polynomdivision und Nullstellen 202
X.4 Gebrochenrationale Funktionen (Pole, Lücken, Asymptoten) 205
X.5 Winkel-, Exponential- und Logarithmusfunktionen 209

Ergebnisse **211**
1. Folgen und Reihen 211
2. Grenzwerte 220
3. Differentialrechnung 226
4. Integralrechnung 250
X. Funktionen 265