

Adriano Oprandi

Angewandte Differentialgleichungen Kompakt

für Ingenieure und Physiker

**DE GRUYTER
OLDENBOURG**

Inhalt

Vorwort — VII

1	Einleitung — 1
2	Differentialgleichungen 1. Ordnung — 7
3	Homogene und inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung — 11
4	Der funktionale Zusammenhang zweier physikalischer Größen — 13
4.1	Potentiell Wachstum — 13
4.2	Exponentielles Wachstum — 15
4.3	Exponentiell beschränktes Wachstum — 17
4.4	Logistisches Wachstum — 19
5	Kompartimentmodelle — 23
6	Numerisches Lösen von Differentialgleichungen — 29
7	Differentialgleichungen 2. Ordnung — 33
7.1	Physikalische Systemumgebungen — 35
7.2	Beispiele zu den Bewegungsgleichungen — 37
8	Die Verformungen eines Festkörpers — 52
8.1	Dehnung und Stauchung am Stab — 53
8.2	Die elastischen Konstanten eines isotropen Körpers — 59
9	Elastische, viskose und plastische Materialien — 66
9.1	Ideal-viskose Fluide — 66
9.2	Viskoelastische Stoffe und Modelle — 68
10	Statische Auslenkungen einer vorgespannten Saite — 75
11	Balkenbiegungen — 79
11.1	Biegelinien — 81
12	Schwingungen — 96
12.1	Das ungedämpfte Federpendel — 96
12.2	Das gedämpfte Federpendel — 99

13	Numerisches Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung — 103
13.1	Das Fadenpendel — 105
13.2	Das physikalische Pendel — 106
13.3	Das Torsionspendel — 109
14	Erzwungene Schwingungen — 112
15	Gekoppelte Pendel — 118
15.1	Die Schwebung — 120
15.2	Schwingungstilger ohne Dämpfung — 122
16	Partielle Differentialgleichungen — 126
16.1	Darstellung von eindimensionalen Wellen — 127
16.2	Die Wellengleichung der ungedämpft schwingenden Saite — 129
16.3	Die Bernoulli-Lösung für eine freie Saitenschwingung — 134
16.4	Erzwungene Saitenschwingungen ohne Dämpfung — 144
16.5	Modalanalyse — 148
17	Die Wellengleichung für Longitudinalschwingungen eines Stabs — 154
17.1	Freie Longitudinalschwingungen eines Stabs — 155
17.2	Erzwungene Longitudinalschwingungen eines Stabs — 158
17.3	Die Wellengleichung für Scher- und Torsionsschwingungen eines kreisrunden Stabs — 161
18	Die Gleichung für Biegeschwingungen eines Balkens — 164
18.1	Euler'sche Knicklast ohne Eigengewicht — 168
18.2	Euler'sche Knicklast mit Eigengewicht — 172
18.3	Biegeschwingungen ohne Dämpfung und Last — 176
18.4	Biegeschwingungen ohne Rotationsträgheit und Last — 183
18.5	Biegeschwingungen ohne Dämpfung, Rotationsträgheit und Last — 184
18.6	Freie Biegeschwingungen ohne Rotationsträgheit — 185
18.7	Erzwungene Biegeschwingungen eines Balkens — 190
18.8	Biegeschwingungen mit verteilten Massen — 193
19	Die Gleichung für Schwingungen einer Membran — 198
19.1	Schwingungen der Rechtecksmembran ohne Last — 200
19.2	Erzwungene Schwingungen der Rechtecksmembran — 202
19.3	Schwingungen der Kreismembran ohne Last — 206
19.4	Erzwungene Schwingungen der Kreismembran — 211

20	Die Plattengleichung — 214
20.1	Die Plattengleichung für Rechtecksplatten — 217
20.2	Die Lösung für die allseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatte — 219
20.3	Biegeflächen von Kreisplatten — 221
20.4	Die Gleichung für Biegeschwingungen einer Platte — 224
20.5	Freie Biegeschwingungen der Rechteckplatte — 224
20.6	Erzwungene Biegeschwingungen der Rechteckplatte — 228
21	Wärmetransporte — 230
21.1	Stationäre Wärmeleitung für drei Grundkörper — 231
21.2	Quantitative Erfassung der Konvektion — 235
21.3	Kombination von Wärmeleitung und Konvektion — 235
22	Instationäre Wärmeleitung ohne innere Wärmequellen — 241
22.1	Lösungen der instationären Wärmeleitungsgleichung — 244
22.2	Die Lösung für die Platte mit Randbedingung 1. Art — 247
22.3	Die Lösung für die Platte mit Randbedingung 3. Art — 251
22.4	Die Lösung für die Kugel mit Randbedingung 1. Art — 253
22.5	Die Lösung für die Kugel mit Randbedingung 3. Art — 257
22.6	Die Lösung für den Zylinder mit Randbedingung 1. Art — 259
22.7	Die Lösung für den Zylinder mit Randbedingung 3. Art — 261
22.8	Instationäre Wärmeleitung mit Randbedingung 2. Art — 262
22.9	Die Lösung für die Platte mit Randbedingung 2. Art — 263
22.10	Die Lösung für den Zylinder mit Randbedingung 2. Art — 266
22.11	Die Lösung für die Kugel mit Randbedingung 2. Art — 269
23	Instationäre Wärmeleitung bei nicht konstanter Starttemperatur — 272
24	Näherungslösungen zur Reihenlösung — 276
24.1	Erstes Glied der Reihenlösung — 276
24.2	Der ideal gerührte Behälter — 279
24.3	Der halbunendliche Körper — 282
24.4	Zusammenfügen zweier halbunendlicher Körper — 293
25	Wärmeleitung mit innerer Wärmequelle — 297
26	Wärmeübertragung mit Rippen — 302
27	Wichtige Kennzahlen und Größen der Wärmeübertragung — 307
27.1	Die Nusselt-Zahl — 307
27.2	Die Reynolds-Zahl — 307
27.3	Der hydraulische Durchmesser — 309

27.4	Die Prandtl-Zahl —	310
27.5	Die Nusselt-Zahl für durchströmte Rohre —	311
28	Gleich- und Gegenstromwärmeüberträger —	316
29	Wärmestrahlung —	324
29.1	Strahlungsübertragung —	325
29.2	Kombination von Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung —	328
29.3	Der IGB bei Strahlung —	329
29.4	Der IGB bei Konvektion und Strahlung —	331
30	Strömungen —	336
30.1	Reibungsfreie Rohrströmungen —	336
30.2	Die Kontinuitätsgleichung —	337
30.3	Die Euler-Gleichung und die Bernoulli-Gleichung —	339
30.4	Die Impulsbilanz am Stromfaden —	348
30.5	Ausfluss- und Entleerungszeiten —	361
31	Wirbelströmungen —	366
31.1	Rotation und Zirkulation einer Strömung —	368
32	Potentialströmungen —	374
32.1	Stromlinien und Stromfunktion —	376
33	Lösungen von Potentialströmungen —	381
33.1	Die erste Grundlösung: Die Translationsströmung —	381
33.2	Die zweite Grundlösung: Die Quellströmung —	381
33.3	Überlagerung von Translations- und Quellströmung —	382
33.4	Überlagerung von Translations-, Quell- und Senkeströmung —	386
33.5	Die dritte Grundlösung: Die Dipolströmung —	388
33.6	Überlagerung von Translations- und Dipolströmung —	390
33.7	Die vierte Grundlösung: Der Potentialwirbel —	392
33.8	Überlagerung von Potentialwirbel und Quell- bzw. Senkeströmung —	393
33.9	Überlagerung von Zylinderumströmung und Potentialwirbel —	394
34	Keil- und Eckströmungen —	397
35	Reibungsbehaftete Rohrströmungen —	400
35.1	Die Bernoulli-Gleichung für reibungsbehaftete Rohrströmungen —	400
35.2	Laminare Rohrströmungen —	402
35.3	Turbulente Rohrströmungen —	404

- 36 Gerinneströmungen 1. Teil — 408
 - 36.1 Energielinie und Wasserspiegel bei konstantem Abfluss — 409
 - 36.2 Trennung der Fließarten — 412
 - 36.3 Veränderung der Wassertiefe und Geschwindigkeit bei einer Sohlschwelle — 413
 - 36.4 Die Massen- und Impulsbilanz einer Gerinneströmung — 414
 - 36.5 Der Wechselsprung — 416
 - 36.6 Die Wehrüberströmung — 418
 - 36.7 Die Unterströmung eines Schützes — 422
 - 36.8 Fließformeln — 426
 - 36.9 Bemessungen von Gerinnequerschnitten — 429
 - 36.10 Das Spannungs- und Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Gerinneströmung — 430
- 37 Zusammenfassung der bisherigen Strömungen — 435
- 38 Die Navier-Stokes-Gleichung — 437
 - 38.1 Analytische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung — 439
- 39 Die Grenzschichtgleichungen — 473
 - 39.1 Die Grenzschicht einer parallel angeströmten Platte — 476
 - 39.2 Die Herleitung der Grenzschichtgleichungen — 480
 - 39.3 Die Lösung der Grenzschichtgleichungen für eine parallel angeströmte Platte — 483
 - 39.4 Die Lösung der Grenzschichtgleichungen für Keilströmungen — 493
 - 39.5 Grenzschichtablösungen — 498
 - 39.6 Die Grenzschichtgleichungen in integraler Form — 503
 - 39.7 Näherung des Geschwindigkeitsprofils durch eine Polynomfunktion — 504
 - 39.8 Das Pohlhausen-Profil für Keilströmungen — 507
- 40 Die Energieerhaltung reibungsbehafteter Strömungen — 512
 - 40.1 Die Herleitung der Temperaturgrenzschichtgleichung bei erzwungener Konvektion — 514
 - 40.2 Die Dicke der Temperaturgrenzschicht bei erzwungener Konvektion — 517
 - 40.3 Die analytische Lösung der Temperaturgrenzschichtgleichung für $Pr = 1$, $T_W = konst.$ — 520
 - 40.4 Die analytische Lösung der Temperaturgrenzschichtgleichung für $Pr > 1$, $T_W = konst.$ — 525
 - 40.5 Die analytische Lösung der Temperaturgrenzschichtgleichung für $Pr < 0,1$, $T_W = konst.$ — 528

40.6	Die analytische Lösung der Temperaturgrenzschichtgleichung für $0,1 \leq Pr < 1$, $T_W = konst.$ — 530
40.7	Die numerische Lösung der Temperaturgrenzschichtgleichung — 533
40.8	Die Nusselt-Zahl als Funktion der Reynolds- und Prandtl-Zahl für die Platte — 541
41	Freie Konvektion — 544
41.1	Die Grenzschichtgleichungen bei freier Konvektion — 544
41.2	Die Lösung der Grenzschichtgleichungen für die Platte — 546
41.3	Näherung des Geschwindigkeits- und Temperaturprofils durch Polynomfunktionen — 550
42	Turbulente Strömungen — 559
42.1	Die Stabilität einer laminaren Strömung — 560
42.2	Die Beschreibung der Turbulenz — 563
42.3	Die Reynolds-Gleichungen — 564
42.4	Der Mischungsweg von Prandtl — 567
42.5	Geschwindigkeitsprofile einer Plattenströmung — 568
42.6	Geschwindigkeitsprofile einer Rohrströmung — 577
42.7	Reibungswiderstand und Grenzschichtdicke der Rohrströmung — 578
42.8	Reibungswiderstand und Grenzschichtdicke der Plattenströmung — 583
42.9	Die Nusselt-Zahl bei laminarer und turbulenter Strömung — 595
42.10	Die Aufteilung der Energieerhaltung — 600
42.11	Gasströmungen in Rohren — 611
43	Gerinneströmungen 2. Teil — 615
43.1	Die Wirbelviskosität und Sohlschubspannung einer Gerinneströmung — 617
43.2	Die universelle Fließformel einer Gerinneströmung — 621
43.3	Die Windschubspannung — 626
43.4	Die Wassertiefe einer Gerinneströmung unter Windeinfluss — 629
43.5	Das Geschwindigkeitsprofil einer Gerinneströmung unter Windeinfluss — 633
43.6	Der Windstau an Ufern und Küsten — 637
43.7	Das Querprofil der Geschwindigkeit — 642
	Weiterführende Literatur — 649
	Stichwortverzeichnis — 654